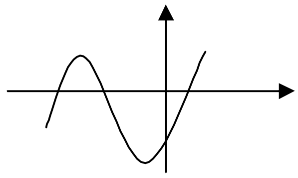
Lösungen Integral

1. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 3$

$f(x) = 0$

Skizze



$0 = 0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 3 \,|\, : 0{,}5$

$0 = x^3 + 4x^2 + x - 6$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 + 5x + 6$

p-q ergibt $x_2 = -2$ und $x_3 = -3$

$A_1 = \int_{-3}^{-2} (0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 3)dx$

$A_1 = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_{-3}^{-2}$

$A_1 = \left[\frac{11}{3}\right] - \left[\frac{27}{8}\right]$

$A_1 = \frac{7}{24} = 0{,}3\text{FE}$

$A_2 = \left|\int_{-2}^{1} (0{,}5x^3 + 2x^2 + 0{,}5x - 3)dx\right|$

$A_2 = \left|\left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_{-2}^{1}\right|$

$A_2 = \left|\left[-\frac{47}{24}\right] - \left[\frac{11}{3}\right]\right|$

$A_2 = \left|-\frac{45}{8}\right|$

$A_2 = \frac{45}{8} = 5{,}6\text{FE}$

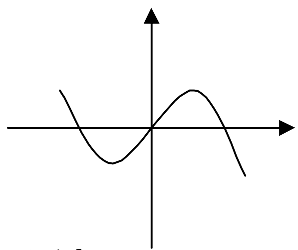
$A_{ges} = A_1 + A_2 = 0{,}3 + 5{,}6 = 5{,}9\text{FE}$

2. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = -2x^3 + 8x$

$f(x) = 0$

Skizze



$0 = -2x^3 + 8x \,|\, : (-2)$

$0 = x^3 - 4x$

$0 = x(x^2 - 4)$ ausklammern mit $x_1 = 0$

und Wurzel ziehen ergibt $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

$A_1 = \left|\int_{-2}^{0} (-2x^3 + 8x)dx\right|$

$A_1 = \left|\left[-0{,}5x^4 + 4x^2\right]_{-2}^{0}\right|$

$A_1 = |[0] - [8]|$

$A_1 = |-8|$

$A_1 = 8\text{FE}$

$A_2 = \int_{0}^{2} (-2x^3 + 8x)dx$

$A_2 = \left[-0{,}5x^4 + 4x^2\right]_{0}^{2}$

$A_2 = [8] - [0]$

$A_2 = 8\text{FE}$

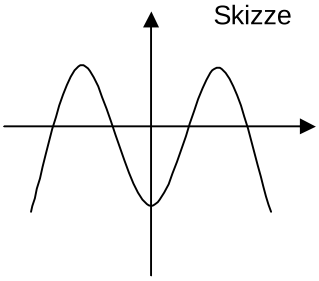
$A_{ges} = A_1 + A_2 = 8 + 8 = 16\text{FE}$

Merke:
Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, sind beide Flächen gleich groß. Man muss nur eine Fläche berechnen und kann dann ihren Wert verdoppeln. Günstigerweise berechnet man die Fläche mit der positiven Grenze, um Fehler beim Einsetzen von Minuswerten zu vermeiden (hier in der Rechnung A_2). Man schreibt dann am Ende: $A_{ges} = 2 \cdot A_2 = 2 \cdot 8 = 16\text{FE}$

3. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = -0{,}5x^4 + 2{,}5x^2 - 2$

Skizze



$f(x) = 0$

$0 = -0{,}5x^4 + 2{,}5x^2 - 2 \,|\, :(-0{,}5)$

$0 = x^4 - 5x^2 + 4$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 5z + 4$ mit p-q ergibt sich $z_1 = 4$ und $z_2 = 1$

$z = x^2$ und Wurzel ziehen ergibt

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

Da Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt, kann man nur die Seite mit den positiven Grenzen berechnen und dann verdoppeln.

$$A_1 = \left| \int_0^1 (-0{,}5x^4 + 2{,}5x^2 - 2)dx \right| \qquad A_2 = \int_1^2 (-0{,}5x^4 + 2{,}5x^2 - 2)dx$$

$$A_1 = \left| \left[-0{,}1x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x \right]_0^1 \right| \qquad A_2 = \left[-0{,}1x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x \right]_1^2$$

$$A_1 = \left| \left[-\frac{19}{15} \right] - [0] \right| \qquad A_2 = \left[-\frac{8}{15} \right] - \left[-\frac{19}{15} \right]$$

$$A_1 = \left| -\frac{19}{15} \right| \qquad A_2 = \frac{11}{15} = 0{,}7FE$$

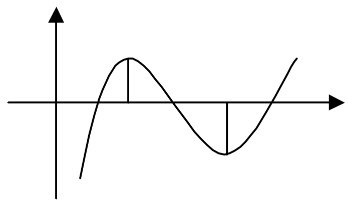
$$A_1 = \frac{19}{15} = 1{,}3FE$$

$$A_{ges} = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot (1{,}3 + 0{,}7) = 4FE$$

4. Aufgabe

Hier muss man Hoch- und Tiefpunkt als Grenzen bestimmen, aber auch die Nullstellen sind wichtig. Liegt eine Nullstelle zwischen Hoch- und Tiefpunkt, wechselt die Fläche ihre Lage (oberhalb oder unterhalb der x-Achse) und somit ihr Vorzeichen. Berücksichtigt man diese Nullstelle nicht, so heben sich die Flächen gegenseitig auf und man erhält ein falsches Ergebnis.

Beispiel:



$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$ $\qquad f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 24$

Berechnung mit p-q ergibt $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$

Überprüfung in der zweiten Ableitung ergibt: Hp bei x = 3 und Tp bei x = 5

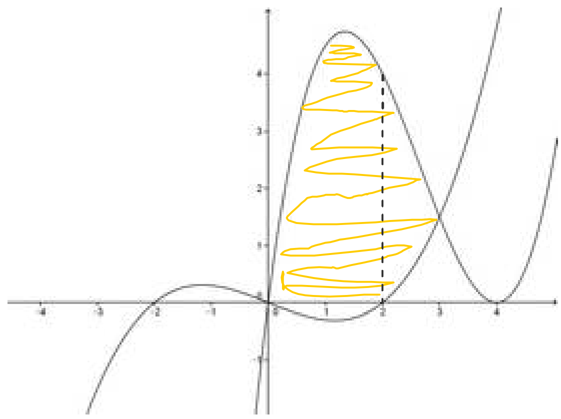
$f(x) = 0$ führt zu dem Ergebnis, dass $x_1 = 2$ und $x_{2/3} = 5$ lautet und somit keine Nullstelle zwischen Hp und Tp liegt.

$$A = \int_3^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50)dx \qquad A = [-31{,}25] - [-35{,}25]$$

$$A = \left[0{,}25x^4 - 4x^3 + 22{,}5x^2 - 50x\right]_3^5 \qquad A = 4FE$$

5. Aufgabe

Die zu berechnende Fläche (gelb gefärbt) liegt oberhalb der x-Achse. Im ersten Stück $[0;2]$ wird die Fläche nur von der x-Achse und $f_1(x)$ begrenzt. Der zweite Teil $[2;3]$ wird von beiden Funktionen begrenzt.
(Schnittpunkt aus der Skizze ablesen)



$$A_1 = \int_0^2 (0{,}5x^3 - 4x^2 + 8x)dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^2$$

$$A_1 = \left[\frac{22}{3}\right] - [0]$$

$$A_1 = \frac{22}{3} = 7{,}3FE$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$0{,}5x^3 - 4x^2 + 8x = 0{,}1x^3 - 0{,}4x$$

$0{,}4x^3 - 4x^2 + 8{,}4x = 0$ aufzuleitende Funktion

$$A_2 = \int_2^3 (0{,}4x^3 - 4x^2 + 8{,}4x)dx$$

$$A_2 = \left[0{,}1x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4{,}2x^2\right]_2^3$$

$$A_2 = [9{,}9] - [7{,}7]$$

$$A_2 = 2{,}2FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 7{,}3 + 2{,}2 = 9{,}5FE$$

6. Aufgabe

Schneiden sich zwei Funktionen, muss man zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche die Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmen.

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$0{,}25(x-4)^2 - 4 = -0{,}25x^2 + 2x$$

$$0{,}25(x^2 - 8x + 16) - 4 = -0{,}25x^2 + 2x$$

$$0{,}25x^2 - 2x + 4 - 4 = -0{,}25x^2 + 2x$$

$$0{,}25x^2 - 2x = -0{,}25x^2 + 2x$$

$$0{,}5x^2 - 4x = 0$$

Hier muss bei der einen Funktion erst die binomische Formel ausgerechnet und dann noch zusammengefasst werden.
Diese Umformung kann man auch vor dem Gleichsetzen durchführen.

Ausklammern von x ergibt: $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$

Für die Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen wird die zusammengesetzte Funktion aufgeleitet.

$$A = \left|\int_0^8 (0{,}5x^2 - 4x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right]_0^8\right|$$

$$A = |[-42{,}7] - [0]|$$

$$A = |-42{,}7|$$

$$A = 42{,}7FE$$