Lösungen F 15

1. Aufgabe

1. Definitionsbereich 2. Verlauf der Funktion 3. Symmetrie 4. S_x / S_y 5. Extrempunkte 6. Wendepunkte 7. Zeichnung

a)
$$f(x) = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$$
$$f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$$
$$f''(x) = 0{,}6x^2 - 2$$
$$f'''(x) = 1{,}2x$$

Am besten zuerst die Ableitungen bilden!

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$ **3.** AS **4.** $S_y(0|3{,}2)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2 \quad |:0{,}05$

$0 = x^4 - 20x^2 + 64$

Substitution mit $x^2 = z$ also $0 = z^2 - 20z + 64$

Lösen mit p-q liefert $z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = x^2$ => $x^2 = 16$ und $x^2 = 4$

Wurzel ziehen ergibt: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = 2$ $x_4 = -2$

$S_{x1}(4|0)$ $S_{x2}(-4|0)$ $S_{x3}(2|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x \quad |:0{,}2$

$0 = x^3 - 10x$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und $0 = x^2 - 10 \quad |+10$

$10 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}2$ $x_3 = -3{,}2$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0) = -2 < 0$ => Hochpunkt

$f''(3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

$f''(-3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(0) = 3{,}2$ $H(0|3{,}2)$

$f(3{,}2) = -1{,}8$ $T(3{,}2|-1{,}8)$

$f(-3{,}2) = -1{,}8$ $T(-3{,}2|-1{,}8)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$0 = 0{,}6x^2 - 2 \quad |:0{,}6$

$0 = x^2 - \frac{10}{3} \quad \left|+\frac{10}{3}\right.$

$\frac{10}{3} = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 1{,}8 \vee x_2 = -1{,}8$

2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1{,}8) = 2{,}2 > 0$ $R - L - K$

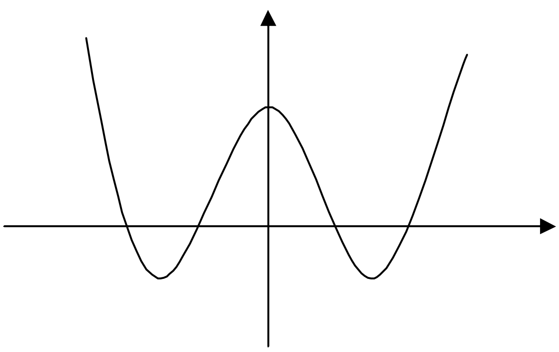
$f'''(-1{,}8) = -2{,}2 < 0$ $L - R - K$

3. Schritt

$f(1{,}8) = 0{,}5$ $W_{R-L}(1{,}8|0{,}5)$

$f(-1{,}8) = 0{,}5$ $W_{L-R}(-1{,}8|0{,}5)$

7. Zeichnung



b) größte Nullstelle: $x = 4$ bzw. $S_x(4|0)$

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$

$f'(4) = 4{,}8$

$t(x) = m \cdot x + b$

alle Werte (x,y,m) einsetzen und b berechnen

$0 = 4{,}8 \cdot 4 + b$

$b = -19{,}2$

$t(x) = 4{,}8x - 19{,}2$

c) $\tan\alpha = m$

$\tan^{-1} m = \alpha$

$\tan^{-1} 4{,}8 = \alpha$

$\alpha = 78{,}2°$

d) $m = 4{,}8$

$f'(x) = m$

$4{,}8 = 0{,}2x^3 - 2x \,|\, -4{,}8$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x - 4{,}8 \,|\, :0{,}2$

$0 = x^3 - 10x - 24$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ (Tangentenstelle mit Steigung 4,8)

$(x^3 + 0x^2 - 10x - 24) : (x - 4) = x^2 + 4x + 6$

Die p-q-Formel $x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4-6}$ ist unter der Wurzel negativ und ergibt somit keine weiteren Lösungen.

Es gibt nur eine Stelle (x = 4) mit der Steigung 4,8.

e) $t(x) = f(x)$

$4{,}8x - 19{,}2 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 - 4{,}8x + 22{,}4$

$0 = x^4 - 20x^2 - 96x + 448$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ da hier die Tangente anliegt

$(x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 96x + 448) : (x - 4) = x^3 + 4x^2 - 4x - 112$

weitere Polynomdivision mit $x_2 = 4$ da Tangente doppelte Lösung

$(x^3 + 4x^2 - 4x - 112) : (x - 4) = x^2 + 8x + 28$

p-q-Formel $x_{3/4} = -4 \pm \sqrt{16-28}$ Wurzel negativ, also keine weiteren Schnittpunkte => nur Tangentenstelle (4l0)

f) $n(x) = m \cdot x + b$

$m_2 = \frac{-1}{m_1}$ => $m_2 = \frac{-1}{4{,}8} = -\frac{5}{24}$ Punkt $(4|0)$ bleibt gleich

$0 = -\frac{5}{24} \cdot 4 + b$ => $b = -\frac{5}{6}$ => $n(x) = -\frac{5}{24}x - \frac{5}{6}$

2. Aufgabe

a) $f'(x) = m$ mit $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$

$f'(2) = -1{,}5$ also $m = -1{,}5$

b) $-1{,}5 = \frac{3}{8}x^2 - 1{,}5x$

$0 = \frac{3}{8}x^2 - 1{,}5x + 1{,}5$

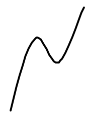
$0 = x^2 - 4x + 4$

p-q-Formel liefert $x_{1/2} = 2$

also keine weiteren Stellen

c) Da die Stelle x = 2 als doppelte Lösung vorkommt, handelt es sich bei einer Funktion 3.Grades um einen Wendepunkt.

d) $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4$ **1.** $D=R$ **2.** $x\to-\infty;\ f(x)\to-\infty$; $x\to+\infty;\ f(x)\to+\infty$



$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x$ **3.** KS **4.** $S_y(0|4)$ für S_x $f(x)=0$

$f''(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ $0=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4$

$f'''(x)=\frac{3}{4}$ $0=x^3-6x^2+32$ Poly.div. mit $x_1=-2$

$(x^3-6x^2+0x+32):(x+2)=x^2-8x+16$

p-q-Formel liefert $x_{2/3}=4$ => $S_{x1}(-2|0)$ und $S_{x2/3}(4|0)$

5. $f'(x)=0$

$0=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x \,\Big|: \frac{3}{8}$

$0=x^2-4x$

$0=x(x-4)$

$x_1=0$ und $x_2=4$

$f'(x)=0 \ \wedge \ f''(x)\neq 0$

$f''(0)=-1{,}5<0\Rightarrow H$ $f(0)=4$ $H(0|4)$

$f''(4)=1{,}5>0\Rightarrow T$ $f(4)=0$ $T(4|0)$

6. $f''(x)=0$

$0=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$

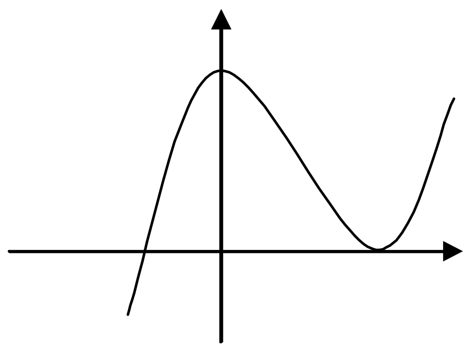
$1{,}5=0{,}75x$

$x=2$

$f''(x)=0 \ \wedge \ f'''(x)\neq 0$

$f'''(2)=0{,}75>0\Rightarrow R-L-K$

$f(2)=2$ $W(2|2)_{R-L-K}$



3. Aufgabe

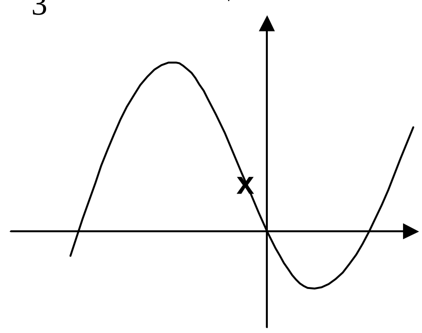
$f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2$ $f''(x)=0$ $f''(x)=0 \ \wedge \ f'''(x)\neq 0$

$f'(x)=2x^2+4x$ $0=4x+4$ $f'''(-1)=4>0\Rightarrow R-L-K$

$f''(x)=4x+4$ $x=-1$ $f(-1)=\frac{4}{3}$ $W_{R-L}(-1|1{,}3)$

$f'''(x)=4$

Da der Wendepunkt eine Rechts-Links-Krümmung aufweist, liegt vor dem Wendepunkt ein Hochpunkt (Rechtskrümmung) und danach ein Tiefpunkt (Linkskrümmung). Somit zeichnet man den Wendepunkt ein und hat den ungefähren Verlauf der Funktion.



4. Aufgabe

a) Da t(x) gegeben ist, kann man mit dem x-Wert den zugehörigen y-Wert berechnen. Dann setzt man den Punkt in die Funktionsgleichung von f(x) ein und berechnet a.

$t(x)=3x$ also $t(-2)=-6$ => $P(-2|-6)$

$f(x) = ax^3 + 0{,}25x^2 + x - 3 \qquad P(-2|-6)$

$-6 = a \cdot (-2)^3 + 0{,}25 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3$

$-6 = -8a - 4$

$-2 = -8a$ => $f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3$

$0{,}25 = a$

Man kann aber auch wie auf Arbeitsblatt E 15 Nr. 5 mit der Steigung und der ersten Ableitung arbeiten.

b)

$t(x) = f(x)$

$3x = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3 \quad |-3x$

$0 = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 - 2x - 3 \quad |:0{,}25$

$0 = x^3 + x^2 - 8x - 12$

Polynomdivision mit $x_1 = -2$ führt zu $0 = x^2 - x - 6$ mit p-q ergibt sich $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.
Die Stelle -2 ist die doppelte Lösung der Tangente. Somit führt x = 3 zum weiteren Schnittpunkt.
$t(3) = 9 \qquad S_3(3|9)$ (Auch in f(x) überprüfen.)

5. Aufgabe

Funktion und Stelle sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \qquad x = 1 \qquad f(1) = 6{,}75$ y-Wert

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x \qquad x = 1 \qquad f'(1) = -2{,}25$ m

$t(x) = m \cdot x + b$

$6{,}75 = -2{,}25 \cdot 1 + b$ => $t(x) = -2{,}25x + 9$

$9 = b$

$t(x) = f(x)$

$-2{,}25x + 9 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \quad |+2{,}25x - 9$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}25x - 1 \quad |:0{,}25$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 5x + 4$

$0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$x_2 = 4$ und $x_3 = 1$

Die Stelle x = 1 ist doppelte Lösung, also Tangente.
Die Stelle x = 4 liefert den gesuchten Punkt.
$f(4) = 0 \qquad P(4|0)$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)